Matemática Discreta
2011

Turno T1

Departamento Matemática (FCT/UNL)

MATEMÁTICA DISCRETA

Departamento Matemática (FCT/UNL)
http://www.claudiomath.co.cc/

Objectivos: Conceitos básicos em Teoria de Grafos e Fundamentos da Matemática. Conjuntos e Aplicações. Técnicas de demonstração e algoritmos para a resolução de problemas.

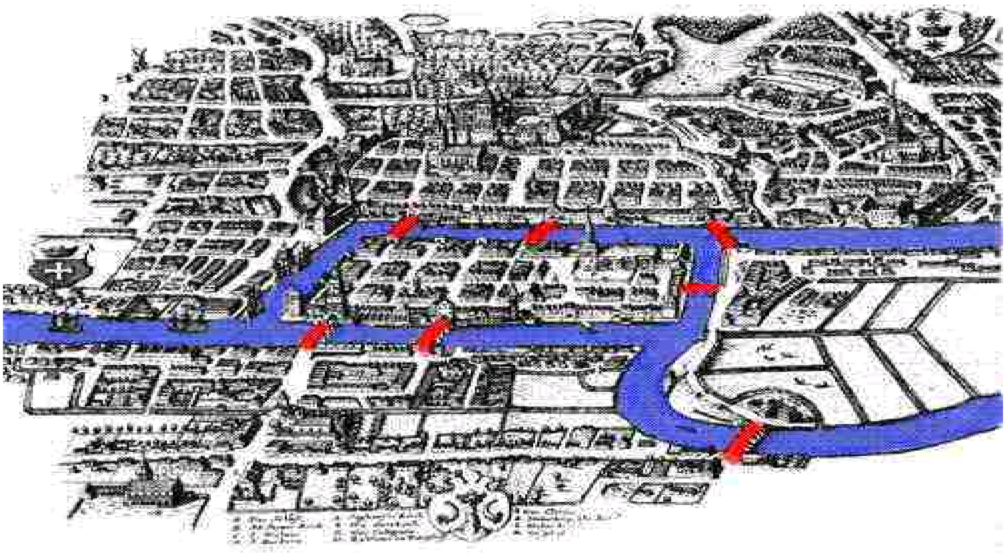
Programa:

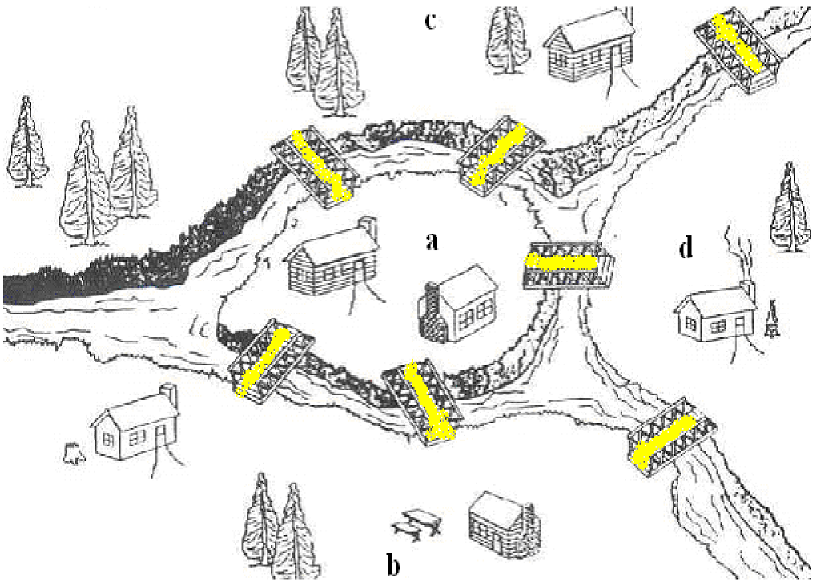
1. Parte 1 - Conjuntos e Aplicações
   1. Conjuntos, relações binárias e indução matemática
   2. Funções
   3. Divisibilidade
   4. Congruências lineares
   5. Relações de recorrência

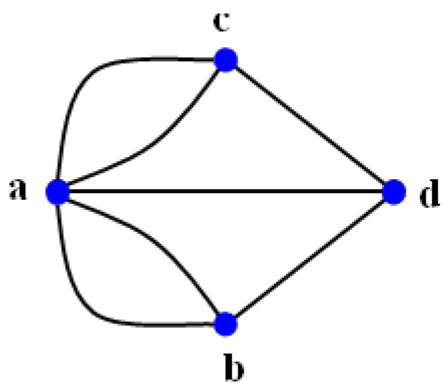
2. Parte 2 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Grafos Hamiltonianos
   6. Matrizes e Grafos

Bibliografia: Indicada no Clip + Material disponibilizado pelos prof.

Motivação: Pontes de Konigsberg (1736 Euler)



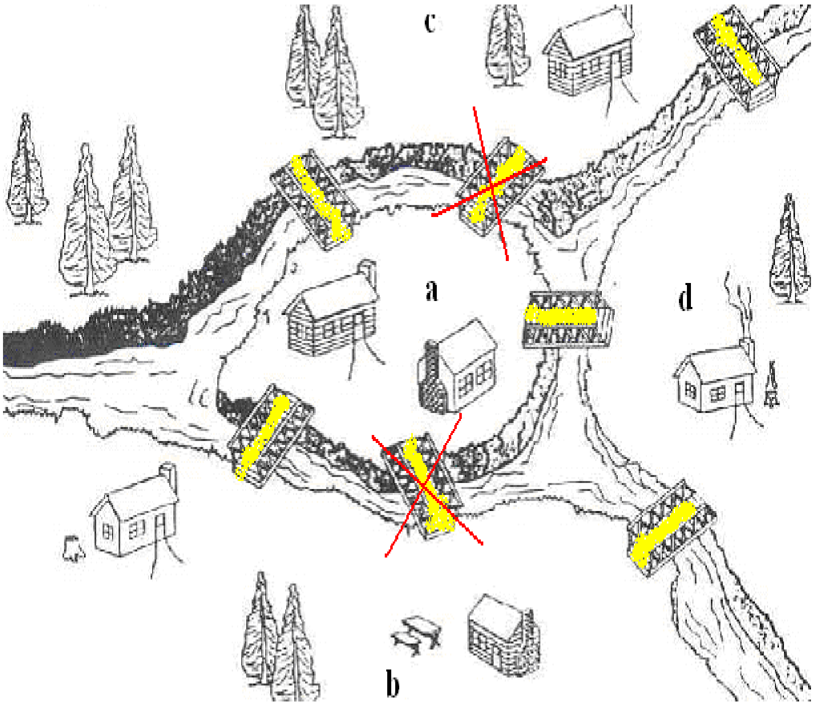


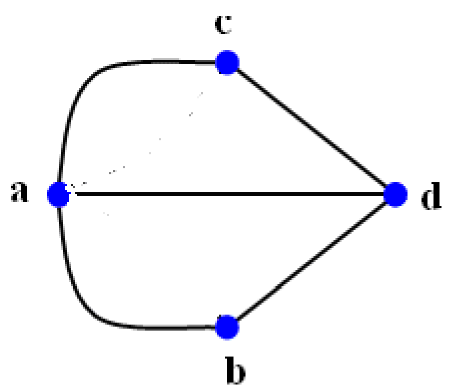


Questão: Será possível percorrer todas as pontes uma e uma só vez, regressando ao ponto de partida?

Questão: Será possível percorrer todas as pontes uma e uma só vez, podendo o passeio não finalizar na mesma margem onde começou?

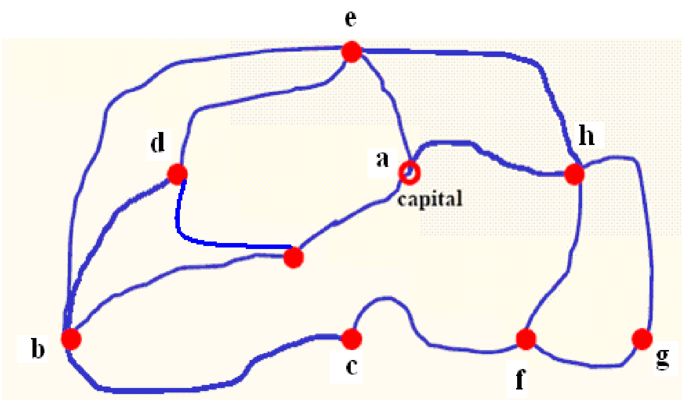
Curiosidade: Konigsberg = Kaliningrado (Hoje)

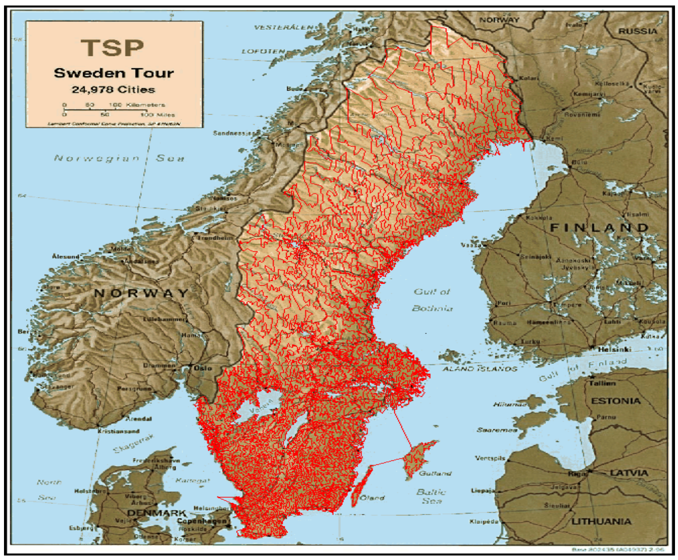




Problema do caixeiro viajante

2004

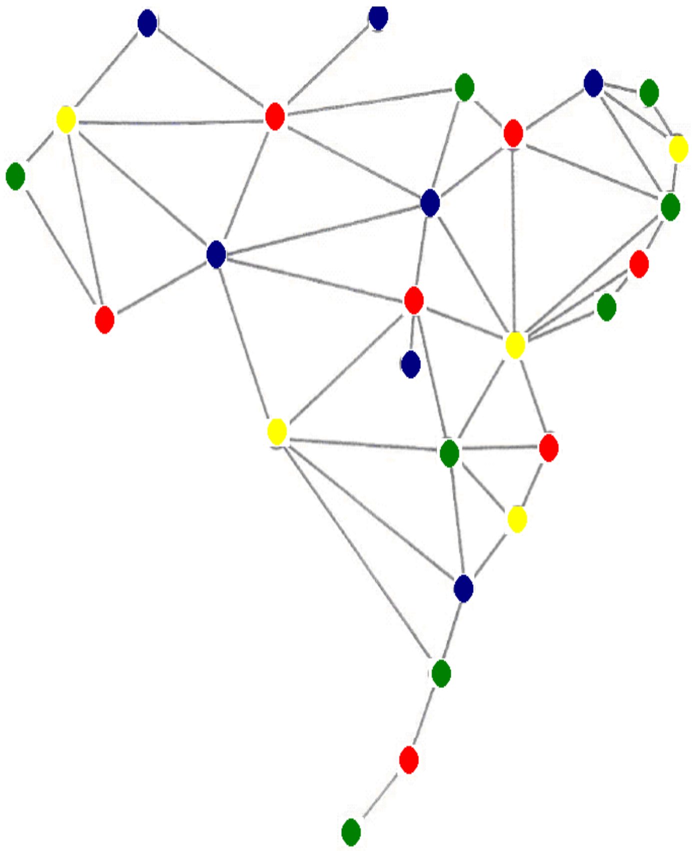




25000 cidades, 7anos(!!!) de tempo computacional

Questão: Será possível saindo da capital visitar todas as outras cidades, uma e uma só vez, e regressar à capital?

Problema da coloração de mapas

Teorema das 4 cores: Qualquer mapa plano, dividido em regiões, necessita no máximo de 4 cores para o colorir, de forma a que regiões vizinhas não tenham a mesma cor.

**Primeiro grande resultado
provado com recurso a meios informáticos**

Curiosidade:

1852- Problema colocado a De Morgan por um aluno

1976- Primeira demonstração "aceite" pela comunidade Matemática, com recurso ao computador (Appel- americano e Haken- alemão)

Capítulo 1

1.1 Conjuntos, Relações Binária e Indução Matemática

Representação de Conjuntos. Algumas Notações:

- Um conjunto é uma "colecção de objectos".

$A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ conjuntos.

$a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ elementos “ $a \in A$ “

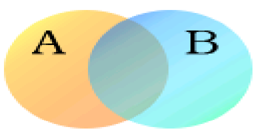
- Em extensão - enumerando os elementos.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Em compreensão - através de condições.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : |x - 1| < 5\}$$

Por diagrama de Venn - representando elementos dentro de linha fechada



- Sejam A e B conjuntos.

Dizemos que A e B são iguais se têm os mesmos elementos. “ A=B “

Dizemos que A está contido em B, se todo o elemento de A é elemento de B “ $A \subseteq B$ “

Dizemos que A é subconjunto próprio de B se A está contido em B e A é diferente de B. $A \subsetneq B$

Observação: $A = B$ se, e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplos:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **Números Naturais**
2. $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ **Números Inteiros**
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$ **Números Racionais**
4. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{dízimas infinitas não periódicas}\}$ **Núm. Reais**
5. $\emptyset$ *o conjunto que não tem nenhum elemento* **conj. Vazio**

Observação: Para qualquer conjunto *A*, $\emptyset \subseteq A$

Operações sobre conjuntos:

Sejam A e B dois conjuntos

- União de conjuntos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

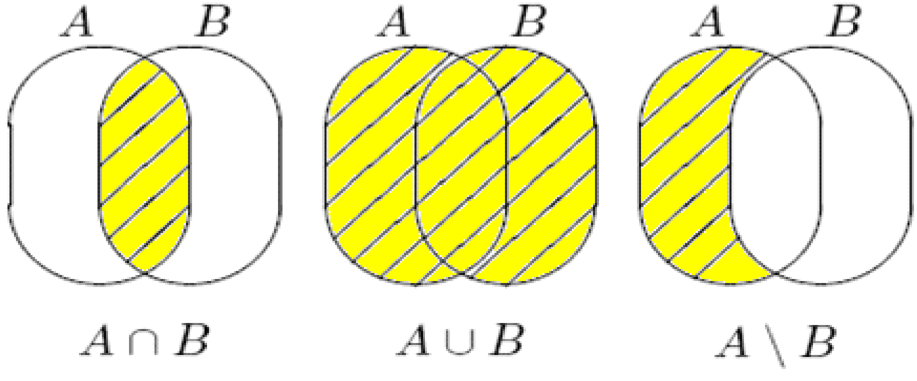
- Intersecção de conjuntos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

- Complementar de B em A de um conjunto:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

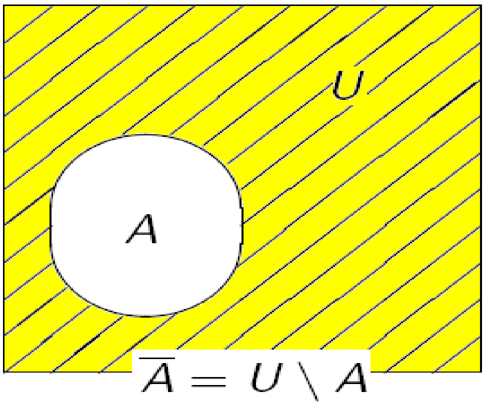
A excepto B ou complementar de B em A



- Fixado um universo U, o complementar de $A \subseteq U$ é o conjunto

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

ou seja, $\overline{A} = U \setminus A$ (o complementar de A em U).



Produto Cartesiano (dois conjuntos):

Sejam A e B dois conjuntos. Define-se o produto cartesiano de A por B como o conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Par ordenado

Observação:

1. Se $a \in A$ e $b \in B$ então

$$\{a, b\} = \{b, a\} \text{ mas } \{a, b\} \neq (a, b) \text{ e } (a, b) \neq (b, a)$$

2. $(a,b) = (c,d)$ se e só se $a=c$ e $b=d$

Exemplo:

$A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Produto Cartesiano (generalização):

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n,$ *n conjuntos. Define-se o produto cartesiano dos conjuntos* $A_1, \ldots, A_n$ *como o conjunto*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ e } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

n-uplo ordenado

Se $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ então $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$

Conjunto das partes de um conjunto *X*:

Seja X um conjunto. Chama-se conjunto das partes de X ao conjunto $P(X)$ *cujos elementos são os subconjuntos de A, i.e.,*

$$P(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

Exemplo: $C = \{2, 3, 4\}$

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, C, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

- $\emptyset \in \mathcal{P}(C)$
- $C \in \mathcal{P}(C)$
- $\{3, 4\} \in P(C)$
- $\cancel{\{2\} \subseteq P(C)}$
- $\{2\} \subseteq \{2, 3\}$
- $\emptyset \subseteq \{3, 4\}$

? $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(C)$ **?**

Partição de um conjunto *X*:

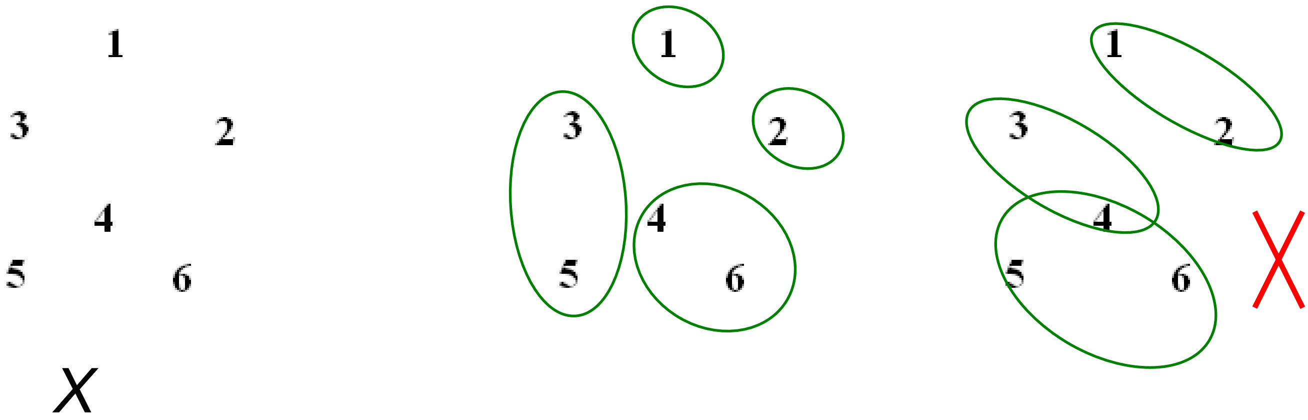
Se *X* é um conjunto. Chama-se partição de X a qualquer conjunto

$$\{X_i : \ i \in I\}$$

de subconjuntos de *X* tais que:

(1) $X = \bigcup_{i \in I} X_i$

(2) $i \neq j \Longrightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$, *para quaisquer* $i, \ j \in I$.



$\{\{2\}, \{1\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ é partição de *X*

$\{\{1,2\},\{3,4\},\{4,5,6\}\}$ não é partição de *X*